OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1899. Nr. 6.

Note sur les développements schlœmilchiens en série de fonctions cylindriques.

Par

Niels Nielsen.

Dans un article qui paraîtra prochainement dans les *Mathematische Annalen*, j'ai donné deux développements de zéro en série de fonctions cylindriques, à savoir:

$$(\alpha)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^n(px)}{p^{n-2s}} = 0, \qquad -\pi \leqq x \leqq +\pi,$$

$$(\beta)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^{n-\mu}(px)\, J^{\mu}(px)}{p^{n-2s}} = 0, \qquad n-2s \geqq 0.$$

Dans ces formules, n et s désignent deux positifs entiers, tandis que μ est une quantité finie quelconque. La note que voici généralise la formule (α).

Prenons en effet comme point de départ la formule élémentaire

$$(\gamma)\qquad \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p-1} \cos px = \frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot x\right)}{2\cos\frac{x}{2}},$$

la formule

$$(\delta)\qquad J^{\mu}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \cos(x\omega)\,(1-\omega^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\, d\omega$$

nous donne, à l'aide d'une propriété fondamentale des intégrales eulériennes,

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{p-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}J^{\mu}(px)}{p^{\mu}} \\ \displaystyle = \frac{1}{2\Gamma(\mu+1)} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\omega x\right)}{\cos\left(\frac{\omega x}{2}\right)}(1-\omega^2)^{\mu-\frac{1}{2}}d\omega, \end{cases}$$

la partie réelle de μ, $\Re(\mu)$, supposée plus grande que $-\frac{1}{2}$. Faisons maintenant croître à l'infini le positif entier n, alors, fait bien connu, l'intégrale définie qui figure au second membre de (ε), s'évanouit dans les deux intervalles $-\pi < x < 0$, $0 < x < +\pi$. La même chose a lieu pour les limites $x = \pm\pi$, pourvu que $\Re(\mu) > \frac{1}{2}$. On verra en outre que l'intégrale en question s'évanouit aussi pour x infiniment petit, pourvu que le produit nx croisse à l'infini.

De cette manière on aura:

$$(1)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}J^{\mu}(px)}{p^{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}} = \frac{1}{2\Gamma(\mu+1)},$$

et le premier membre de cette formule est une série uniformément convergente, pourvu que l'on ait à la fois: 1º $\Re(\mu) > -\frac{1}{2}$, *2º* $-\pi < x < 0$ *ou* $0 < x < +\pi$.

Cela posé, la valeur asymptotique de $J^{\mu}(x)$:

$$J^{\mu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pm\pi x}}\cdot\cos\left(\mp x + \frac{\pi}{2}(\mu+\tfrac{1}{2})\right)$$

(pour les valeurs extrêmement grandes de x, et $\pm x$ positif) montrera que la condition suffisante $\Re(\mu) > -\frac{1}{2}$ est nécessaire aussi pour la convergence de la série (1). A l'aide de cette même valeur asymptotique on verra en outre que *la série*

$$(\zeta)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}J^{\mu}(px)}{p^{\mu+2n}},$$

n étant un entier quelconque, est aussi uniformément convergente dans les intervalles $-\pi < x < 0$, $0 < x < +\pi$, pourvu que $\Re(\mu + 2n) > -\frac{1}{2}$.

En réalité, le terme de reste de la série (ζ) est égal à celui de la série (1) en y posant $\mu + 2n$ au lieu de μ, abstraction faite d'un facteur simple et d'une quantité infiniment petite en comparaison de ce terme de reste même.

De cette proposition on peut en déduire plusieurs autres.

En effet, mettons dans la formule (1) $\mu + n$ au lieu de μ, et $\sqrt{x}$ au lieu de x, nous aurons, en appliquant n fois l'identité

$$(\eta) \qquad \int_0^x x^{-\frac{\mu}{2}} J^{\mu}(\alpha\sqrt{x})\, dx = -\frac{2}{\alpha} x^{-\frac{\mu-1}{2}} J^{\mu-1}(\alpha\sqrt{x}) + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\mu-2}}{\Gamma(\mu)},$$

cette autre formule

$$2^{\mu} \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} x^{-\frac{\mu}{2}} J^{\mu}(p\sqrt{x})}{p^{\mu+2n}} = \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \frac{\sigma_{2n-2q}}{q!} \frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2q}}{\Gamma(\mu+q+1)},$$

où l'on a posé

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \sigma_r = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^r}, \quad r \text{ positif entier.}$$

Posons ensuite de nouveau x^2 au lieu de x, la formule que nous venons d'obtenir peut s'écrire:

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^{\mu}(px)}{p^{\mu+2n}} = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{(-1)^q \sigma_{2n-2q}}{q!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2q}}{\Gamma(\mu+q+1)},$$

formule qui est vraie dans l'intervalle $-\pi < x < +\pi$, pourvu que $\Re(\mu + n) > -\frac{1}{2}$, *condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme de la série (1) et toutes les autres obtenues par là en appliquant l'intégration répétée.*

Supposant $\Re(\mu) > -\frac{1}{2}$, on peut démontrer immédiatement la formule (2) en appliquant (δ), et la formule

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}\cos px}{p^{2n}} = \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \frac{\sigma_{2n-2q}}{q!} x^{2q},$$

déjà indiquée par Euler[1]).

Pour avoir une autre application de notre proposition, mettons dans (1) $\sqrt{x}$ au lieu de x, différentions ensuite r fois par rapport à x, la formule

$$(\theta) \qquad D_x^r\left[x^{-\frac{\mu}{2}} J^{\mu}(a\sqrt{x})\right] = \left(-\frac{a}{2}\right)^r x^{-\frac{\mu+r}{2}} J^{\mu+r}(a\sqrt{x})$$

nous donne, après une légère modification:

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^{\mu}(px)}{x^{\mu} p^{\mu-2r}} = 0, \quad -\pi < x < 0 \ \text{ ou } \ 0 < x < +\pi,$$

formule qui est vraie, pourvu que $\Re(\mu - 2r) > -\frac{1}{2}$, condition nécessaire et suffisante pour l'application de (θ) sur la série (1) terme à terme; on verra en effet que toutes les séries obtenues de (1) par la différentiation successive indiquée par (θ) sont uniformément convergentes, et la dernière de ces séries est précisément (3).

Supprimant le facteur $x^{-\mu}$ de notre série (3), la formule ainsi obtenue est vraie aussi pour x infiniment petit. Cela peut se démontrer en appliquant l'opération (θ) sur (ε). On pourra de la même manière démontrer (3), mais cette démonstration deviendra beaucoup plus compliquée que celle appliquée par nous dans le texte.

Notre formule (3) nous suggère diverses réflexions, par exemple, les suivantes:

1° *On peut établir le développement (3) de zéro sans connaître la somme de la série hors de l'intervalle où cette somme est constamment égale à zéro.*

Voici une propriété essentielle qui distingue des fonctions

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. IV, p. 281 seq.

trigonométriques les fonctions cylindriques. Or, cette différence saute aux yeux si l'on regarde les formules (γ) et (ε). La série qui figure à (ε) est en effet convergente pour $n = \infty$, et peut être différentiée terme à terme, tandis que la série correspondante de (γ) sera divergente. C'est l'introduction du paramètre μ qui rend possible cette convergence et cette différentiation terme à terme, de sorte qu'il est bien probable qu'à l'aide d'une formule analogue à (δ) on peut définir d'autres fonctions plus générales que $J^{\mu}(x)$ et qui fourniront des développements de zéro, analogues à (3).

2°. *Supposons qu'il soit possible de développer la fonction* $f(x)$ *en série de la forme*

$$(\iota) \qquad f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \sum_{p=1}^{p=\infty} a_p J^{\mu}(px),$$

ce développement peut se faire d'une infinité de façons, pourvu que $\Re(\mu) > \frac{3}{2}$.

Posons $\mu = 0$, $\mu = 1$, la formule (ι) nous donne les séries de M. Schlömilch[1]), démontrées plus tard d'une manière extrêmement élégante par M. Beltrami[2]). Ces développements ne se font que d'une seule manière, tandis que les généralisations des séries schlœmilchiennes données sans démonstration rigoureuse par M. Lommel[3]), peuvent être effectuées d'une infinité de façons.

---

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. II, p. 155.

[2]) Istituto Lombardo Rendiconti, 2e série, t. XIII, p. 410.

[3]) Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 73.

Copenhague, le 15 novembre 1899.